ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$ ΚΑΙ ΑΝΑΠΑΡΑΜΕΤΡΗΣΗ:

Άσκηση 1: Έστω καμπύλη $(C): z = z(t)$, $t \in [-1, 8]$.

Να βρείτε μια αναπαραμέτρηση (C^*) της καμπύλης (C) με παραμετρική παράσταση $z = z^*(s)$, $s \in [1, 4]$.

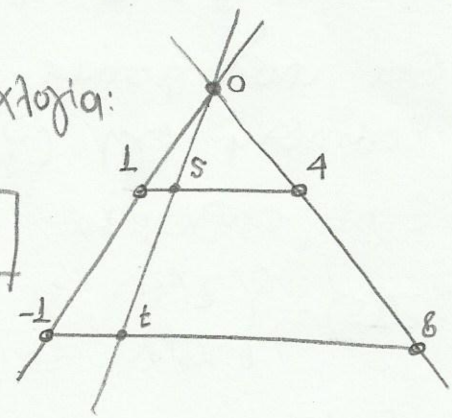
ΛΥΣΗ

Αναζητώ τη συνεχή και 1-1 συνάρτηση αναπαραμέτρησης $t = \psi(s)$, $s \in [1, 4]$ η οποία προφανώς θα απεικονίζει το διάστημα $[1, 4]$ με αμφιμονοσήμαντο τρόπο στο διάστημα $[-1, 8]$ και μάλιστα τ/ω: $\psi(1) = -1$ & $\psi(4) = 8$.

Τότε η σύνθεση $z := z(\psi(s)) = z^*(s)$, $s \in [1, 4]$ θα είναι μια αναπαραμέτρηση της καμπύλης (C).

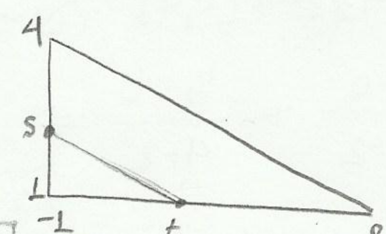
Η διαδικασία έχει ως εξής:

$t: [1, 4] \to [-1, 8]$ και προκύπτει η αναλογία:



$$\frac{t-(-1)}{s-1} = \frac{8-(-1)}{4-1} \Rightarrow \boxed{t = \psi(s) = 3s - 4}$$

Μπορούμε και σαν 2ο τρόπο να κατασκευάσουμε άλλα τρίγωνα και να πάρουμε ισοδύναμες αναλογίες.



$$\frac{t-(-1)}{s-1} = \frac{8-(-1)}{4-1} \Rightarrow \boxed{t = \psi(s) = 3s - 4}$$

Παρατήρηση: Με τις αναλογίες και τον τρόπο αυτό εύρεσης αναπαραμετρήσεων οι αναπαραμετρήσεις είναι όλες γραμμικές συναρτήσεις

Άσκηση 2: Να υπολογιστεί το άθροισμα καμπυλών :

$(\gamma_1): z_1 := \frac{1+i}{2}t - 2 - i \,,\quad t\in[2,4]$

$(\gamma_2): z_2 := \frac{t}{3}(2-i) + \frac{2}{3}(1+i),\quad t\in[-1,2]$

ΛΥΣΗ

Για τις (γ_1) & (γ_2) καμπύλες, παρατηρούμε:

$t=4 \rightsquigarrow z_1(4) = 2+2i-2-i = i$

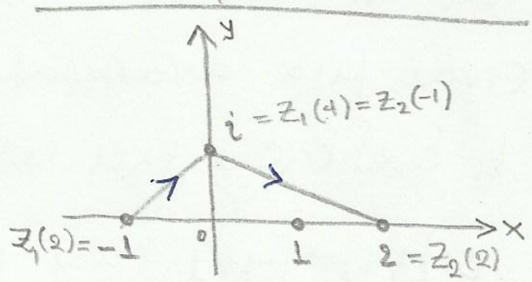
$t=-1 \rightsquigarrow z_2(-1) = \cancel{-\frac{2}{3}} + \frac{i}{3} + \cancel{\frac{2}{3}} + \frac{2i}{3} = i$

δηλ. το πέρας της $1^{ης}$ ταυτίζεται με την αρχή της $2^{ης}$

Μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές καμπύλες μας στο σχεδιάγραμμα

$E\left(-2-i, \frac{1+i}{2}\right)$ & $E\left(\frac{2}{3}(1+i), \frac{2-i}{3}\right)$

Γενικότερα είναι:



Θα υπολογίσουμε την νέα καμπύλη: $(\gamma) = (\gamma_1) \oplus (\gamma_2) : z(t),\ t\in[0,1]$

Έτσι, επιλέγουμε:

$$z(s) = \begin{cases} z_1^*(s), & s\in[0,\frac{1}{2}] \\ z_2^*(s), & s\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

και εφαρμόζουμε αφορές τον κανόνα της άσκησης 1.

- $t: [0,\frac{1}{2}] \to [2,4]$ για το z_1 (κατασκευή ομοίων τριγώνων)

$$\frac{s-0}{t-2} = \frac{1/2 - 0}{4-2} \Rightarrow t = 4s+2 \Rightarrow z_1(t(s)) = \frac{1+i}{2}(4s+2) - 2 - i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1(t(s)) = \underbrace{2(1+i)s - 1}_{z_1^*(s)},\quad \forall s\in[0,\tfrac{1}{2}]$$

- $t: [\frac{1}{2},1] \to [-1,2]$ για το z_2

$$\frac{s-\frac{1}{2}}{t-(-1)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-(-1)} \Rightarrow t = 6s-4 \Rightarrow z_2(t(s)) = \frac{6s-4}{2-i} + \frac{2}{3}(1+i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_2(t(s)) = \underbrace{2(2-i)s - 2(1-i)}_{z_2^*(s)},\quad \forall s\in[\tfrac{1}{2},1]$$